



Abgabetermin: 24.06.2009

25 Punkte = 100%

Fragen/Kommentare/Errata: <http://dirkolivertheis.wordpress.com/2009/06/11/linopt09-blatt-11>

Aufgabe 1 Barrier-Methode (6 Punkte)

Seien $X = [0, 1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $\eta_0 = 1$, $x^{(0)} = (0.2, 0.6)$, und $c = (5, 2)$.

- (a) Bestimmen Sie eine Barrier-Funktion (siehe Kor. 5.26) $f: \text{int } X \rightarrow \mathbb{R}$ und für jedes $x \in \text{int } X$ die Hesse-Matrix von f in x , sowie für die Funktionen f_η den Newton-Schritt in x .
- (b) Berechnen Sie gemäß der Short-Step-Barrier Methode $x^{(1)}, \dots, x^{(4)}$, wobei $\eta_k = 1.8\eta_{k-1}$ (anstatt der in der Algorithmenbeschreibung angegebenen Formel $\eta_k = (1+1/(8\sqrt{\vartheta_f}))\eta_{k-1}$ gesetzt werden soll.

Bemerkung. Mit dem Faktor 1.8 (statt $1/(8\sqrt{\vartheta_f}) \approx 1.176$) garantiert die Theorie nicht mehr, dass man int X nicht verlässt oder sich zu weit vom zentralen Pfad entfernt; bei den ersten vier Schritten geht aber im obigen Fall alles gut, und der Fortschritt ist größer. Es ist interessant, ein kleines Programm zu schreiben, mit dem man den Algorithmus mit Faktor 1.176 über mehr Iterationen laufen lässt. Dann kann man auch ein wenig mit den anderen Parametern (wie $x^{(0)}$ und η_0) experimentieren.

Aufgabe 2 Kodierungslängen von Lösungen von Gleichungssystemen (5 Punkte)

Für alle Matrizen (und Vektoren) X sei $|X|_\infty$ das Maximum der Beträge der Einträge: $|X|_\infty := \max_{k,l} |X_{k,l}|$.

Sei A eine invertierbare $(n \times n)$ -Matrix mit ganzzahligen Einträgen, $b \in \mathbb{Z}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$. Zeigen Sie mit Hilfe der Cramer'schen Regel und der Hadamard'schen Ungleichung: Die Einträge von x sind rational, und man kann ganze Zahlen q und p_1, \dots, p_n wählen mit $x_l = \frac{p_l}{q}$, so dass gilt

$$|q| \leq n^{n/2} |A|_\infty^n \quad \text{und} \quad |p_l| \leq n^{n/2} |A|_\infty^{n-1} |b|_\infty.$$

Schätzen Sie die Kodierungslänge von x ab durch diejenigen von A und b ab.

Aufgabe 3 Seiten von konvexen Mengen (8 Punkte)

Sei K eine konvexe Menge.

- Eine Teilmenge $X \subset K$ heisst *extremal in K* , wenn jedes Geradensegment $[x, y] := \{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$, dessen Enden x, y in K liegen und dessen Schnitt mit X nicht nur aus höchstens einem der Punkte x, y besteht, ganz in X liegt. Formaler bedeutet das, dass für alle $x, y \in K$ gilt: $[x, y] \cap X \not\subset \{\emptyset, \{x\}, \{y\}\} \implies [x, y] \subset X$.
- Eine Teilmenge $F \subset K$ heisst *exponiert in K* , wenn es einen Halbraum H gibt, der K enthält, und für den der Schnitt seiner begrenzende Hyperebene mit K gerade F ist. Exponierte Teilmengen konvexer Mengen nennt man auch *Seiten*.

Wenn klar ist, auf welche konvexe Obermenge man sich bezieht, lässt man das „in K “ oft weg. Zeigen Sie:

- Jede extremale Teilmenge von K ist konvex.
- Jede exponierte Teilmenge von K ist auch extremal.
- Es gibt extremale Teilmengen, die nicht exponiert sind. (Geben sie ein K und eine extremale X von K an, so dass X in K nicht exponiert ist.)
- Jede extremale Teilmenge X' einer extremalen Teilmenge X von K ist eine extremale Teilmenge von K .
- Es gibt exponierte Teilmengen von exponierten Teilmengen von K , die nicht exponiert in K sind. (Geben sie ein K , exponierte Teilmenge X von K und eine exponierte Teilmenge X' von X an, so dass X' in K nicht exponiert ist.)

Aufgabe 4 Seiten von Polyedern (6 Punkte)

Es seien U, V endliche Mengen in \mathbb{R}^n , sowie $P = \text{conv } V + \text{ccone } U$ ein Polyeder mit einer Seite F definiert von der Ungleichung $a^\top x \leq \beta$. Zeigen Sie:

- Mit $U_F := \{u \in U \mid a^\top u = 0\}$ und $V_F := \{v \in V \mid a^\top v = \beta\}$ gilt $F = \text{conv } V_F + \text{ccone } U_F$.
- Ist F nicht leer, so gilt
 - $\text{char } F = \text{char } P \cap H^=(a, 0)$ (= die von $a^\top x \leq 0$ definierte Seite von $\text{char } P$)
 - $\text{lineal } F = \text{lineal } P$

(Das ist Satz 6.17 der Vorlesung.)